مجله مهندسی مکانیک مدرس، خرداد ۱۳۹۳، دوره ۱۴، شماره ۳، ص‌ص ۱-۶

ماهنامه علمی پژوهشی

مهندسی مکانیک مدرس

mme.modares.ac.ir

تحلیل قابلیت اطمینان چندقیدی با استفاده از روش فاصله بی‌نظمی

مهدی فکور[1*]، پرویز محمدزاده[2]، مهدی باجلان[3]

۱- استادیار مهندسی هوافضا، دانشکده علوم و فنون نوین، دانشگاه تهران، تهران
۲- استادیار مهندسی هوافضا، دانشکده علوم و فنون نوین، دانشگاه تهران، تهران
۳- کارشناس ارشد مهندسی هوافضا، دانشکده علوم و فنون نوین، دانشگاه تهران، تهران
*تهران، صندوق پستی ۱۵۶۱-۱۴۳۹۵، mfakoor@ut.ac.ir

اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل
دریافت: ۲۱ تیر ۱۳۹۲
پذیرش: ۱۵ مهر ۱۳۹۲
ارائه در سایت: ۲۱ اردیبهشت ۱۳۹۳

کلید واژگان:
تحلیل قابلیت اطمینان
احتمال و اماندگی
فاصله بی‌نظمی
پدیده نادر
تابع حالت حدی

چکیده

تحلیل قابلیت اطمینان طراحی‌های سازه‌ای حساس، مستلزم به‌کارگیری روش‌هایی است که قابلیت تخمین مقدار بسیار کم احتمال و اماندگی را داشته باشند. همچنین این طراحی‌ها دارای چندین تابع حالت حدی هستند و روش مذکور باید قادر باشد قابلیت اطمینان تمام حالت‌های حدی را با دقت مناسبی تحلیل نماید. برای رسیدگی به این موارد، در این مقاله، روش فاصله بی‌نظمی توسعه یافته ارائه شده است که توانایی تحلیل قابلیت اطمینان چند تابع حالت حدی، که تعدادی از آن‌ها پدیده نادر هستند، را دارد. در این روش که بر پایه روش نمونه‌برداری با اهمیت بنا نهاده شده است، با کاهش واریانس نمونه‌های تصادفی، دقت و سرعت محاسبات تحلیل قابلیت اطمینان افزایش می‌یابد. مهم‌ترین مزیت این روش عدم استفاده از اطلاعات مربوط به محتمل‌ترین نقطه شکست است. روش مذکور قابلیت بکارگیری در مدل‌های صریح و ضمنی را داشته و قابلیت اطمینان هر حالت حدی را به‌طور جداگانه ارائه می‌دهد. روش ارائه شده بر روی چندین نمونه مطالعاتی معتبر پیاده‌سازی شده است. نتایج به‌دست آمده نشان می‌دهد که به‌کارگیری روش فاصله بی‌نظمی توسعه‌یافته برای تحلیل چندتابع حالت حدی، موجب افزایش دقت طراحی شده و از طراحی محتاطانه جلوگیری می‌کند.

Application of cross-entropy method in multi limit-state reliability analysis

Mahdi Fakoor[1*], P Mohammadzadeh[2], Mahdi Bajellan[3]

1- Department of Aerospace Engineering, Faculty of New Sciences and Technologies, University of Tehran, Tehran, Iran.
2- Department of Aerospace Engineering, Faculty of New Sciences and Technologies, University of Tehran, Tehran, Iran.
3- Department of Aerospace Engineering, Faculty of New Sciences and Technologies, University of Tehran, Tehran, Iran.
*P.O.B. 14395-1561 Tehran, mfakoor@ut.ac.ir

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper
Received 12 July 2013
Accepted 07 October 2013
Available Online 11 May 2014

Keywords:
Reliability Analysis
Failure Probability
Cross-Entropy
Rare Event
Limit State Function

ABSTRACT

This paper is focused upon the development of an efficient multi limit-state reliability analysis method based on extended cross-entropy. In order to achieve a reliable state in the modern critical structural designs, it is necessary to utilize an efficient reliability analysis method to estimate the probability of failure. Reliability analysis of such designs is faced with several challenges, such as rarity of the probability of failure and multiplicity of limit-state functions. To address these issues, in this research an Importance Sampling (IS)-based method is developed which uses Cross-Entropy (CE) method to reduce sampling variance, and leads to a fast and accurate reliability analysis method. The main advantage of this method is the ability to perform reliability estimation (especially for rare events) without the Most Probable Failure Point (MPP) calculation. The proposed method is demonstrated on several test problems and the results are compared together. Results obtained show that method introduced in this paper provides an effective way of improving reliability analysis of multi limit-state functions. In addition, using the proposed method, prevents the mistake of over-designing while retains usability of the method.

۱- مقدمه

تحلیل قابلیت اطمینان به بررسی احتمال واماندگی طراحی از طریق محاسبه احتمال شکست توابع حالت حدی[1] (به اختصار: حالت حدی/ قید) آن طراحی می‌پردازد. تابع حالت حدی بیانگر حالتی از طراحی است که در صورت نقض شدن آن، طراحی صورت پذیرفته نمی‌تواند وظیفه خواسته شده را به‌درستی انجام دهد. احتمال شکست حالت حدی با استفاده از رابطه (۱) بیان می‌شود:

$$P_{\text{fail}} = P\{g(\bar{x}) \geq 0\} = \int_{g(\bar{x})\geq 0} f_X(\bar{x})d\bar{x} \qquad (۱)$$

که در اینجا $P\{.\}$ بیانگر مقدار احتمال، P_{fail} احتمال شکست، $g(\bar{x})$ تابع حالت حدی و $\bar{x}$ بردار تصادفی است که از روی متغیر تصادفی X با تابع چگالی احتمال توام $f_X(\bar{x})$ به‌دست آمده است. همچنین مقدار صفر در سمت راست عبارت $g(\bar{x}) \geq 0$، موسوم به پارامتر آستانه یا پارامتر سطح[2] است و می‌تواند مقداری غیر صفر نیز داشته باشد.

1- Limit state function

2- Level parameter

Please cite this article using:

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

M. Fakoor, P.Mohammadzadeh, M. Bajellan, Application of cross-entropy method in multi limit-state reliability analysis, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 14, No. 3, pp. 1-6, 2014 (In Persian)

محاسبه تحلیلی این انتگرال، به‌دلیل چندبعدی بودن، غیرخطی بودن تابع چگالی احتمال و عدم وجود تابعی صریح برای $g(\bar{x})$ غیر ممکن بوده و ناکارآمد است. همچنین یک چالش جدی در تحلیل قابلیت اطمینان، در مسائلی مطرح می‌شود که مقدار احتمال شکستِ حالت حدی از مرتبه پایینی (کمتر از 10^{-5}) است که در این صورت احتمال شکست حالت حدی یک پدیده نادر[1] است. این مسئله در کاربردهای خاصی نظیر سازه‌های بحرانی، شبکه‌های مخابراتی و قابلیت اطمینان نرم‌افزار از اهمیت بسیار بالایی برخوردار است.

مهم‌ترین روش‌های تحلیل قابلیت اطمینان پدیده‌های نادر، روش‌های کمینه‌سازی واریانس[2] و فاصله بی‌نظمی[3] (CE) هستند[۱] که بر پایه روش نمونه‌برداری بااهمیت[4] (IS) توسعه یافته‌اند. اساس روش نمونه‌برداری بااهمیت در انتخاب یک تابع چگالی احتمال، موسوم به تابع چگالی بااهمیت است، به گونه‌ای که واریانس نمونه‌برداری کاهش یابد. انتخاب تابع چگالی بااهمیت، اثر چشمگیری در دقت دارد. از این رو لازم است تا تابع چگالی بهینه مورد استفاده قرار بگیرد. روش فاصله بی‌نظمی، یک راه‌کار برای دستیابی به تابع چگالی احتمال بااهمیت بهینه، بدون استفاده از محاسبات محتمل‌ترین نقطه شکست[5] (MPP) است. در مرجع [۲] این روش مورد تحلیل قرار گرفته است. نتایج حاصل نشان می‌دهد روش فاصله بی‌نظمی دارای دو مزیت اساسی است: (الف) از قابلیت حل تحلیلی برخوردار است که پیاده‌سازی آن را ساده‌تر کرده و هزینه محاسباتی را کاهش می‌دهد، (ب) برای تعداد متغیرهای بالاتر کارآیی بیشتری دارد.

روش‌هایی که تاکنون برای تحلیل قابلیت اطمینان چند حالت حدی با استفاده از روش فاصله بی‌نظمی ارائه شده‌اند، با استفاده از رویکرد سری کردن، چند حالت حدی را با یک حالت حدی معادل‌سازی کرده‌اند [۳-۶]. در این روش‌ها به جای تحلیل چند حالت حدی، فقط بحرانی‌ترین آن‌ها تحلیل می‌شود. این روش نه تنها باعث کاهش دقت می‌شود بلکه در کاربردهایی نظیر بهینه‌سازی بر مبنای قابلیت اطمینان (که نیاز به روشی است که قابلیت تحلیل چند حالت حدی، به طور همزمان، را داشته باشد) نیز ناکارآمد است. از این رو نیاز به راهکارهای مناسبی برای رفع این مشکلات است. ساده‌ترین راهکار، استفاده پی‌درپی از تحلیل قابلیت اطمینان تک‌قیدی، برای تمام توابع حالت حدی است. این روش هزینه محاسباتی را بسیار بالا می‌برد و با توجه به اهمیت کاهش محاسبات در تحلیل قابلیت اطمینان، عملاً کارآیی ندارد. روش دیگر تعمیم مفهوم قابلیت اطمینانِ اجزای سری برای چند تابع حالت حدی است[۳-۷]؛ بدین صورت که با داشتن دیدگاهی نسبت به ماهیت مسئله، عملکرد چند حالت حدی به‌صورت سری درنظر گرفته می‌شود؛ بدین معنی که طراحی صورت گرفته زمانی شکست می‌خورد که حداقل یکی از توابع حالت حدی ارضا نشود. این روش دارای مشکلاتی است، از جمله اینکه: (الف) شرط استفاده از مفهوم سری، مستقل بودن پدیده‌ها نسبت به یکدیگر است. در واقع عملکرد توابع حالت حدی به‌صورت سری نیست؛ (ب) تنها یک احتمال شکست هدف معادل برای تمام توابع حالت حدی درنظر گرفته می‌شود که منجر به جواب محتاطانه می‌شود. این مسئله در طراحی‌هایی که مقادیر احتمال شکستِ هدف، تفاوت زیادی با یکدیگر داشته باشند، از اهمیت بیشتری برخوردار است. با توجه به وجود این مشکلات، در مرجع [۸] یک روش سیستمی ارائه شده که مشکل اول (مستقل نبودن توابع حالت حدی) را حل کرده است. در این روش، با در نظر گرفتن تمام توابع حالت حدی، یک ناحیه شکست جدید تعریف شده که نمونه‌برداری در این ناحیه صورت می‌پذیرد. این روش کمبودهای ناشی از سری کردن قیود را جبران می‌کند ولی مشکل دوم (درنظر گرفتن یک مقدار احتمال شکست هدف برای تمام توابع حالت حدی) همچنان باقی است.

برای رفع این مشکل، در این مقاله روش فاصله بی‌نظمی به گونه‌ای توسعه یافته است تا تحلیل قابلیت اطمینان چند تابع حالت حدی به‌طور هم‌زمان صورت پذیرد تا از این طریق امکان به‌کارگیری چنداحتمال شکست هدف میسر شود. برای این منظور تحلیل قابلیت اطمینان به‌صورت برداری مورد ارزیابی قرار گرفته است.

از آنجایی که تحلیل قابلیت اطمینان با استفاده از روش فاصله بی‌نظمی مبتنی بر نمونه‌برداری تصادفی است، قابلیت به‌کارگیری در مدل‌های صریح و ضمنی (مانند مدل‌های المان محدود) را نیز دارد. همچنین در این روش نیازی به محاسبه MPP نیست که موجب سهولت استفاده از آن در مدل‌های غیرخطی و پیچیده صنعتی می‌شود. یک نمونه کاربرد این روش در طراحی ماهواره در مرجع [۹] ارائه شده است.

۲- نمونه‌برداری بااهمیت (IS)

یک پدیده نادر دارای احتمال وقوع بسیار کمی است و تخمین آن از طریق شبیه‌سازی مونت‌کارلو (که در آن نمونه‌ها به صورت تصادفی و از روی تابع چگالی احتمال متغیر تصادفی تولید می‌شوند) مشکل است.

روش نمونه‌برداری بااهمیت راهکاری برای تغییر تابع چگالی احتمال نمونه‌برداری ارائه می‌دهد که موجب می‌شود تعداد زیادی از نمونه‌ها در مرز تابع حالت حدی قرار بگیرند و از این طریق تعداد بیشتری از پدیده نادر شبیه‌سازی شود.

اساس این روش بر انتخاب یک تابع چگالی به نام تابع چگالی با اهمیت $h_X(\bar{x})$ است به‌طوری که به‌ازای تمام مقادیر $\bar{x}$، تابع چگالی $f_X(\bar{x})$ را در بربگیرد[6]؛ بدین معنا که اگر $h_X(\bar{x})$ صفر شد، به‌ازای تمام مقادیر $\bar{x}$، $f_X(\bar{x})$ نیز صفر شود. در این‌صورت رابطه (۱) به‌صورت (۲) بازنویسی می‌شود:

$$P_{\text{fail}}^{\text{IS}} = \int I[\bar{x}] \frac{f_X(\bar{x})}{h_X(\bar{x})} h_X(\bar{x}) d\bar{x} \qquad (۲)$$

که در اینجا $P_{\text{fail}}^{\text{IS}}$ مقدار احتمال شکست به روش نمونه‌برداری با اهمیت، $\frac{f_X(\bar{x})}{h_X(\bar{x})}$ نسبت احتمال[7] و $I[\bar{x}]$ تابع شاخص[8] بوده که در واقع جایگزین مرز انتگرال‌گیری شده است و به‌صورت رابطه (۳) تعریف می‌شود:

$$I[\bar{x}] = \begin{cases} 1, g(\bar{x}) \geq 0 \\ 0, g(\bar{x}) < 0 \end{cases} \qquad (۳)$$

انتگرال (۲) می‌تواند با استفاده از رابطه (۴) تقریب زده شود:

$$P_{\text{fail}}^{\text{IS}} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} I[x_i] \frac{f_X(x_i)}{h_X(x_i)} \qquad (۴)$$

که در اینجا N تعداد نمونه‌ها است و x_i، i اُمین درآیه از بردار $\bar{x} = [x_1, ..., x_i, ... x_N]$ است که از روی تابع چگالی با اهمیت $h_X(\bar{x})$ نمونه‌برداری می‌شود.

انتخاب تابع چگالی با اهمیت تاثیر بسزایی در میزان دقت این روش دارد.

1- Rare event
2- Variance minimization
3- Cross Entropy
4- Importance Sampling
5- Most Probable Failure Point
6- Dominating
7- Likelihood ratio
8- Index function

اثبات می‌شود[۱۰] که مقدار بهینه تابع چگالی با اهمیت از رابطه (۵) به‌دست می‌آید:

$$h_X^*(\bar{x}) = \frac{I[\bar{x}] f_X(\bar{x})}{P_{\text{fail}}} \tag{۵}$$

در رابطه اخیر، مقدار بهینه تابع چگالی ISبستگی به مقدار P_{fail} دارد که خود خواسته مسئله است، بنابراین یافتن مقدار دقیق آن ممکن نبوده و نیاز به روشی دیگری است تا بتوان آن را با دقت مناسبی تقریب زد. یک راه‌کار برای دستیابی به این هدف استفاده از روش فاصله بی‌نظمی است.

۳- روش فاصله بی‌نظمی توسعه یافته

روش فاصله بی‌نظمی یک روش کارآمد برای محاسبه تابع چگالی با اهمیت، به ویژه در پدیده‌های نادر، ارائه می‌دهد. مهم‌ترین ویژگی‌های این روش عبارت است از: (الف) عدم استفاده از اطلاعات محتمل‌ترین نقطه شکست که موجب افزایش دقت و توانایی حل مسائل غیرخطی می‌شود، (ب) امکان حل تحلیلی مسئله برای توابع چگالی خانواده نمایی که موجب کاهش حجم محاسبات و افزایش سرعت می‌شود.

برای استفاده از روش فاصله بی‌نظمی در مسائلی که دارای چندین حالت حدی هستند، عملکرد آن‌ها با استفاده از مفهوم سری کردن توابع حدی معادل‌سازی شده است. این روش در معادله (۶) نشان داده شده است:

$$P\left\{\text{Max}[g_1(\bar{x}), g_2(\bar{x}), \dots, g_n(\bar{x})] \geq 0\right\} \leq \text{Min}[P_{\text{fail}(1)}^{\text{T}}, P_{\text{fail}(2)}^{\text{T}}, \dots, P_{\text{fail}(n)}^{\text{T}}] \tag{۶}$$

که در اینجا $P_{\text{fail}(i)}^{\text{T}}, i = 1, \dots, n$ احتمال شکست هدف (مورد انتظار) حالت حدی i-اُم است. Min و Max نیز عملگرهای بیشینه و کمینه هستند.

معادله (۶) بیان می‌کند که برای تحلیل قابلیت اطمینان چند تابع حالت حدی، کافی است احتمال شکست بحرانی‌ترین حالت حدی، از کمترین احتمال شکست هدف (مورد نظر) نیز کمتر باشد. در عمل توابع حالت حدی سری نیستند، زیرا شرط استفاده از این مفهوم، مستقل بودن پدیده‌ها نسبت به یکدیگر است که در اینجا این‌گونه نیست. همچنین تنها یک احتمال شکست هدف (کمترین مقدار) درنظر گرفته می‌شود که منجر به جواب محتاطانه می‌شود. از این رو در این بخش روش فاصله بی‌نظمی برای تحلیل چند تابع حالت حدی توسعه داده شده است. در این روش تحلیل قابلیت اطمینان به گونه‌ای صورت می‌گیرد که احتمال شکست هدف برای تمام توابع حالت حدی به‌طور جداگانه درنظر گرفته شود. این مفهوم در معادله (۷) نشان داده شده است:

$$P\left\{[g_1(\bar{x}), g_2(\bar{x}), \dots, g_n(\bar{x})] \geq 0\right\} \leq [P_{\text{fail}(1)}^{\text{T}}, P_{\text{fail}(2)}^{\text{T}}, \dots, P_{\text{fail}(n)}^{\text{T}}] \tag{۷}$$

که در اینجا عملکرد توابع حالت حدی به‌صورت برداری درنظر گرفته شده است. بدین معنی که قابلیت اطمینان هر تابع به‌ازای احتمال شکست متناظر خودش مورد ارزیابی قرار می‌گیرد.

پیاده‌سازی این روش مستلزم این است که تابع چگالی احتمال با اهمیت برای تمام قیود محاسبه شود. برای این‌منظور متداول است که $h_X(\bar{x})$ از همان خانواده توابع چگالی احتمال $f_X(\bar{x})$ انتخاب شود[۱۱]. از این رو اگر $f_X(\bar{x})$ به‌صورت تابع چگالی پارامتریک به فرم $f_X(\bar{x}, \bar{u})$ باشد (به‌عنوان مثال تابع چگالی نرمال، تابعی از پارامترهای میانگین و واریانس متغیر تصادفی است)، $h_X(\bar{x})$ به‌صورت $f_X(\bar{x}, \bar{v})$ تعریف می‌شود که در اینجا $\bar{v}, \bar{u}$ پارامتر مرجع[1] تابع چگالی احتمال بوده و به‌منظور تحلیل چند تابع حالت حدی، به شکل‌برداری درنظر گرفته شده‌اند. بنابراین برای یافتن تابع چگالی با اهمیت $h_X(\bar{x})$ کافی است بردار پارامتر مرجع $\bar{v}$ محاسبه شود. برای یافتن بردار $\bar{v}$ از تعریف فاصله بی‌نظمی[2] بین دو تابع $h_X(\bar{x})$ و $h_X^*(\bar{x})$ استفاده می‌شود. فاصله بی‌نظمی بین دو تابع مذکور با رابطه (۸) تعریف می‌شود[۱۱]:

$$\text{D}_{\text{KL}}\{h_X^*(\bar{x}), h_X(\bar{x})\} = \int \ln\{\frac{h_X^*(\bar{x})}{h_X(\bar{x})}\} h_X^*(\bar{x}) d\bar{x} \tag{۸}$$

که در اینجا $\text{D}_{\text{KL}}\{.\}$ فاصله بی‌نظمی بین دو تابع و $\ln\{.\}$ تابع لگاریتم طبیعی است.

با قرار دادن $h_X^*(\bar{x}) = I[\bar{x}] f_X(\bar{x}, \bar{u}) / P_{\text{fail}}$ و $h_X(\bar{x}) = f_X(\bar{x}, \bar{v})$ در رابطه (۷)، این رابطه به شکل رابطه (۹) بازنویسی می شود:

$$\text{D}_{\text{KL}}\{h_X^*(\bar{x}), h_X(\bar{x})\} = \int \ln\{h_X^*(\bar{x})\} h_X^*(\bar{x}) d\bar{x} - \frac{1}{P_{\text{fail}}} \int \ln\{\bar{x}, \bar{v}\} I[\bar{x}] f_X(\bar{x}, \bar{u}) d\bar{x} \tag{۹}$$

اولین عبارت در سمت راست معادله اخیر مستقل از $\bar{v}$ است. بنابراین برای یافتن $\bar{v}$ کافی است که فاصله بی‌نظمی به صورت معادله (۱۰) کمینه شود:

$$\underset{\bar{v}}{\text{Min}}\, \text{D}_{\text{KL}} = \underset{\bar{v}}{\text{Max}} \frac{1}{P_{\text{fail}}} \int \ln\{f_X(\bar{x}, \bar{v})\} I[\bar{x}] f_X(\bar{x}, \bar{u}) d\bar{x} \tag{۱۰}$$

استفاده از رابطه اخیر در مواردی که $I[\bar{x}]$ ماهیت نادر دارد و به‌ازای تعداد زیادی از نمونه‌ها صفر می‌شود، محدودیت دارد از این رو برای افزایش دقت محاسبه $\bar{v}$، دوباره از نمونه‌برداری با اهمیت استفاده می‌شود. بنابراین معادله (۱۰) به‌صورت (۱۱) اصلاح می‌شود:

$$\underset{\bar{v}}{\text{Min}}\, \text{D}_{\text{KL}} = \underset{\bar{v}}{\text{Max}} \int \ln\{f_X(\bar{x}, \bar{v})\} I[\bar{x}] \frac{f_X(\bar{x}, \bar{u})}{f_X(\bar{x}, \bar{w})} f_X(\bar{x}, \bar{w}) d\bar{x} \tag{۱۱}$$

که در اینجا $f_X(\bar{x}, \bar{w})$ تابع چگالی احتمال دلخواه با بردار پارامتر مرجع $\bar{w}$ است که $f_X(\bar{x}, \bar{u})$ را در بر می‌گیرد.

معادله (۱۱) دارای حل تحلیلی نبوده و برای به‌دست آوردن بردار پارامتر مرجع $\bar{v}$ لازم است تا آن را با استفاده از سری به شکلی که در معادله (۱۲) آورده شده است، تقریب زد:

$$\underset{\bar{v}}{\text{Min}}\, D_{KL} = \underset{\bar{v}}{\text{Max}} \frac{1}{M} \sum_{j=1}^{M} \ln\{f_X(x_j, \bar{v})\} I[x_j] \frac{f_X(x_j, \bar{u})}{f_X(x_j, \bar{w})} \tag{۱۲}$$

که در اینجا M تعداد نمونه‌هاست و x_j، j اُمین درایه از بردار $\bar{x} = [x_1, \dots, x_j, \dots x_M]$ است که از روی $f_X(\bar{x}, \bar{w})$ نمونه‌برداری می‌شود.

در نهایت با یافتن مقدار $\bar{v}$ بهینه، موسوم به $\bar{v}^*$ و جایگذاری آن در معادله (۴)، رابطه (۱۳) حاصل می‌شود که برای تخمین قابلیت اطمینان چندتابع حالت حدی با استفاده از روش فاصله بی‌نظمی مورد استفاده قرار می‌گیرد:

$$P_{\text{fail}}^{\text{CE}} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} I[x_i] \frac{f_X(x_i, \bar{u})}{f_X(x_i, \bar{v}^*)} \tag{۱۳}$$

که در اینجا $P_{\text{fail}}^{\text{CE}}$ تخمین احتمال شکست با روش فاصله بی‌نظمی است. x_i، i-اُمین درآیه از بردار $\bar{x} = [x_1, \dots, x_i, \dots x_N]$ است که از روی تابع چگالی احتمال $f_X(x_i, \bar{v}^*)$ نمونه‌برداری شده است.

دو معادله اخیر اساس روش فاصله بی‌نظمی با چند تابع حالت حدی بوده و تفاوت آن‌ها با روش تحلیل یک حالت حدی در این است که پارامتر سطح ($\bar{\gamma}$) و پارامتر مرجع ($\bar{v}$) هر دو به‌صورت برداری هستند. پارامتر سطح به

1- Reference parameter

2- Cross-entropy /kullback-leibler distance

شکل $\gamma_{1\times m}$ و پارامتر مرجع به شکل $v_{q\times m}$ است که در آن m تعداد قیود و qتعداد پارامترهای تابع چگالی احتمال است (برای نمونه برای تابع چگالی نمایی q=۱ و برای تابع چگالی نرمال q=۲ است). روش فاصله بی‌نظمی با چند تابع حالت حدی در فلوچارت نشان داده شده در شکل ۱ آورده شده است. الگوریتم ارائه شده در این شکل به‌طور کلی در سه گام بیان می‌شود:

گام اول: انتساب مقادیر اولیه. در این مرحله مقادیر اولیه پارامترهای روش فاصله بی‌نظمی مقداردهی می‌شود. این پارامترها در ادامه معرفی شده اند. N تعداد نمونه‌های تخمین نهایی برای استفاده در معادله (۱۳) است و بین $۱۰^۵$ و $۱۰^۶$ درنظر گرفته شده است، M تعداد نمونه‌های تخمین اولیه برای یافتن پارامتر مرجع بهینه است و $۱۰^۳$ فرض شده است، m تعداد توابع حالت حدی مورد نظر برای تحلیل قابلیت اطمینان است، n تعداد متغیرهای تصادفی است، ρ پارامتر ندرت[1] است که مقداری بین ۰/۰۱ تا ۰/۱ دارد و γ پارامتر سطح مطلوب که در این مقاله صفر درنظر گرفته شده است. همچنین $\bar{v}_0$و $\bar{\gamma}_0$بردار مقادیر اولیه پارامتر مرجع و پارامتر سطح هستند. k شمارنده است.

گام دوم: محاسبه بردار مقادیر پارامتر مرجع بهینه. در این مرحله یک روند متوالی برای بروز رسانی همزمان بردار سطح ($\bar{\gamma}$) و بردار مرجع ($\bar{V}$) برای رسیدن به مقدار بهینه پارامتر مرجع ($\bar{V}^*$) طی می‌شود. برای این منظور از پارامتر ندرت (ρ) که مقدار کوچکی دارد و در گام قبلی تعریف شد، استفاده می‌شود. این پارامتر در انتخاب یک جمعیت نمونه نخبه به تعداد $N_{el}=[\rho N]$ مورد استفاده قرار می‌گیرد. در واقع با انجام این کار در هر مرحله تعدادی از صفرهای تابع شاخص $I[x]$ در معادله (۱۲) حذف می‌شود تا همگرایی این معادله تسهیل شود. باید توجه داشت که نمونه‌برداری در سه‌بعد و به فرم $\bar{x}_{M\times n\times m}$ صورت می‌گیرد. همچنین مقادیر تمام توابع حالت حدی به‌طور همزمان و به فرم $\bar{g}_{M\times m}(\bar{x})$ محاسبه می‌شود.

گام سوم: تخمین نهایی. در این مرحله نهایتاً با استفاده از پارامتر مرجع بهینه به‌دست آمده در گام دوم، مقدار احتمال شکست توابع حالت حدی مورد نظر با استفاده از معادله (۱۳) تخمین زده می‌شود.

۴- نمونه مطالعاتی

در این بخش چندین نمونه مطالعاتی مورد استفاده قرار گرفته است تا کارآیی روش فاصله بی‌نظمی در طراحی‌هایی که تحلیل همزمان چند تابع حالت حدی مدنظر است، مشخص شود. در این نمونه‌های مطالعاتی، توابع حالت حدی به گونه‌ای انتخاب شده‌اند که: (الف) احتمال وقوع برخی از آن‌ها بسیار کم (نادر) باشد، (ب) حد مناسبی از غیرخطی بودن را دارا باشند، (ج) دارای نویز محاسباتی باشند و (د) احتمال شکست آن‌ها نسبت به یکدیگر زیاد باشد.

از آنجایی که این روش برای افزایش دقت تحلیل قابلیت اطمینان مسائلی با چند تابع حالت حدی ارائه شده است، نتایج به‌دست آمده براساس دقت مورد ارزیابی قرار گرفته‌اند. معیاری که برای بررسی دقت مورد استفاده قرار گرفته است خطای نسبی است که به‌صورت رابطه (۱۴) تعریف می‌شود[۱۰]:

که در اینجا E_r خطای نسبی و N تعداد نمونه‌های تخمین نهایی است. σ_{est} و μ_{est} به‌ترتیب میانگین و انحراف معیار تخمین احتمال شکست می‌باشند.

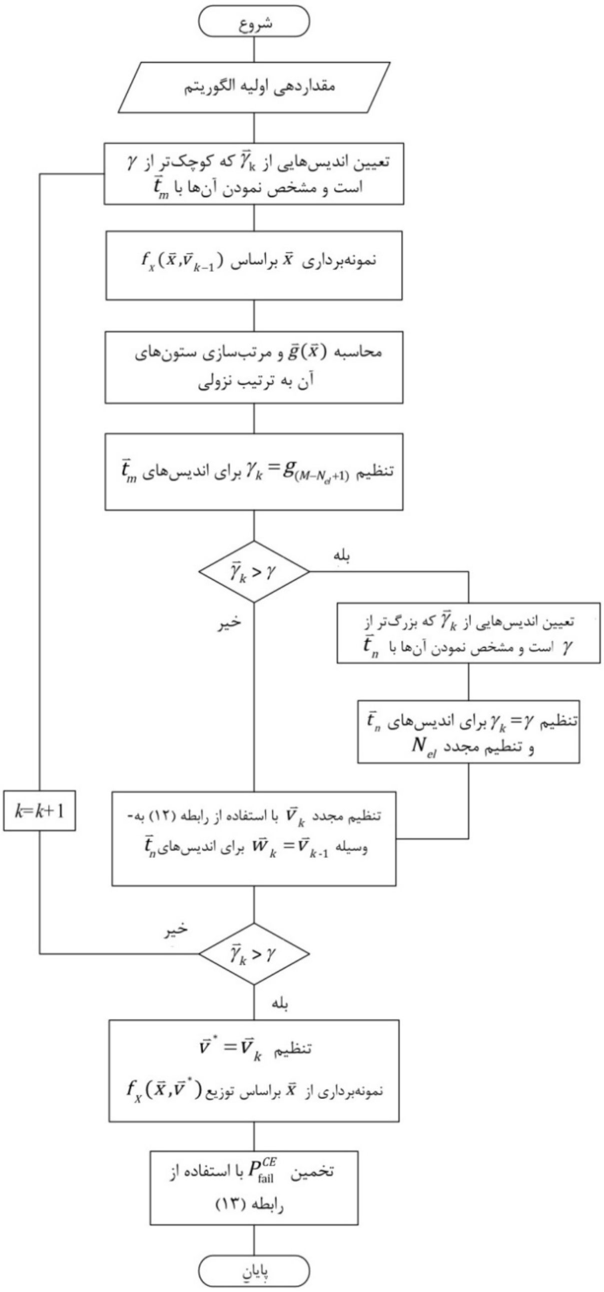
1- Rarity parameter

همچنین هزینه محاسباتی با استفاده از معیار زمان مورد ارزیابی قرار گرفته است. باید دقت داشت این زمان تنها برای مقایسه مرتبه بزرگی زمان محاسبات ارائه شده است و با اجرای محاسبات بر روی پردازشگر دیگر می‌تواند تغییر کند.

$$E_r = \frac{\sigma_{est}}{\mu_{est}\sqrt{N}} \qquad (۱۴)$$

۴-۱- نمونه مطالعاتی اول

این نمونه مطالعاتی در مرجع [۱۲] ارائه شده است. در این نمونه، تحلیل قابلیت اطمینان چهار تابع حالت حدی مدنظر قرار گرفته است. این توابع بر اساس دو متغیر تصادفی تعریف شده‌اند که هر دو آنها به‌صورت نرمال استاندارد توزیع شده‌اند. فرمول‌سازی این نمونه مطالعاتی در رابطه (۱۵) نشان داده شده است:



شکل ۱ الگوریتم فاصله بی‌نظمی برای تحلیل چند حالت حدی

$$[P_{\text{fail}1},...,P_{\text{fail}4}]=P\left\{[g_1(\bar{x}),...,g_4(\bar{x})]\geq 0\right\}$$
$$g_1(\bar{x})=-0.1(x_1-x_2)^2+\frac{x_1+x_2}{\sqrt{2}}-3$$
$$g_2(\bar{x})=-0.1(x_1-x_2)^2-\frac{x_1+x_2}{\sqrt{2}}-3$$
$$g_3(\bar{x})=-x_1+x_2-3.5\sqrt{2}$$
$$g_4(\bar{x})=-x_1-x_2-3.5\sqrt{2}, \quad (۱۵)$$

که در اینجا $\bar{x}=[x_1,x_2]$ بردار متغیرهای تصادفی است که به‌صورت نرمال استاندارد توزیع شده‌اند. $g_1(\bar{x}),...,g_4(\bar{x})$ چهار تابع حالت حدی مورد نظر هستند. $P\{.\}$ بیانگر احتمال رخداد یک پدیده است و $P_{\text{fail}1},...,P_{\text{fail}4}$ احتمال شکست تابع حالت حدی اول تا چهارم هستند. این نحوه نگارش در سایر نمونه‌های مطالعاتی هم استفاده شده است.

مطابق این فرمول‌سازی، یک حالت حدی زمانی نقض می‌شود که مقدار حالت حدی بزرگتر از صفر شود. بر این اساس تحلیل قابلیت اطمینان یک بار با استفاده از روش ارائه شده در این مقاله برای تحلیل قابلیت اطمینان چند حالت حدی و بار دیگر با استفاده از رویکرد معادل‌سازی با یک تابع (نشان داده شده در رابطه (۶) و بر اساس مرجع [۱۲]) صورت گرفته است و نتایج آن در جدول ۱ با هم مقایسه شده است.

نتایج آورده شده در جدول ۱ نشان می‌دهد که رویکرد مرجع [۱۲] برای سری کردن توابع حالت حدی معیار مناسبی از قابلیت اطمینان چند توابع حالت حدی نیست. به‌طوری که قابلیت اطمینان توابع حالت حدی از مرتبه $۱۰^{-۴}$ می باشد ولی استفاده از رویکرد سری منجر به تخمینی از مرتبه $۱۰^{-۳}$ شده است. این مسئله بیانگر این واقعیت است که استفاده از رویکرد سری لزوماً منجر به درنظر گرفتن بدترین حالت حدی (که در نمونه $۸/۷۱×۱۰^{-۴}$ است) نمی‌شود. همچنین مقادیر به‌دست آمده برای خطای نسبی حاکی از دقت بالای روش ارائه شده در تخمین قابلیت اطمینان است. نکته مهمی که باید مدنظر قرار داد این است که اگرچه نتایج حاصل از تحلیل با استفاده از $۱۰^{۵}$ و $۱۰^{۶}$ تفاوت چندانی با یکدیگر ندارند ولی زمان تحلیل در حالت دوم تقریبا ده برابر شده است. این موضوع بیانگر اهمیت یافتن تعداد نمونه مناسب در تحلیل قابلیت اطمینان است تا از این طریق زمان اجرای محاسبات حداقل شود.

۴-۲- نمونه مطالعاتی دوم

این نمونه مطالعاتی در مرجع [۷] آورده شده است. ویژگی بارز این نمونه مطالعاتی، اختلاف مرتبه عددی احتمال شکست هر یک از توابع حالت حدی است. بر این اساس سه‌تابع حالت حدی درنظر گرفته شده است که به‌ترتیب توابعی از دو، چهار و شش متغیر تصادفی هستند که تمام متغیرهای آن‌ها به‌صورت نرمال استاندارد توزیع شده‌اند. فرمول‌سازی این نمونه مطالعاتی در رابطه (۱۶) آورده شده است:

$$[P_{\text{fail}1},...,P_{\text{fail}3}]=P\left\{[g_1(\bar{x}),...,g_3(\bar{x})]\geq 0\right\}$$
$$g_j(\bar{x})=-\beta n^{0.5}+\sum_{i=1}^{n}x_i,\ j=1,2,3 \quad (۱۶)$$

که در اینجا n بیانگر تعداد متغیرهای تصادفی در هر تابع حالت حدی است که برای حالت حدی اول تا سوم به‌ترتیب ۲، ۴ و ۶ درنظر گرفته شده است. β نیز پارامتر ثابتی است که برای قیود اول تا سوم به‌ترتیب ۱، ۳ و ۵ درنظر گرفته شده است.

قابلیت اطمینان این سه حالت حدی با استفاده از روش ارائه شده در این مقاله مورد بررسی قرار گرفته است و نتایج آن با مرجع [۷] (سطر آخر جدول ۲) مقایسه شده است.

جدول ۱ نتایج نمونه مطالعاتی اول

حالت حدی	احتمال شکست (P_{fail}) $N=۱۰^{۵}$	احتمال شکست (P_{fail}) $N=۱۰^{۶}$	خطای نسبی (E_r) $N=۱۰^{۵}$	خطای نسبی (E_r) $N=۱۰^{۶}$	زمان محاسبات T(sec) $N=۱۰^{۵}$	زمان محاسبات T(sec) $N=۱۰^{۶}$
g_1	$۸/۷۱×۱۰^{-۴}$	$۸/۷۸×۱۰^{-۴}$	$۹/۱۹×۱۰^{-۳}$	$۳/۸۸×۱۰^{-۳}$	۰/۵	۴/۶۶
g_2	$۸/۷۰×۱۰^{-۴}$	$۸/۷۹×۱۰^{-۴}$	$۶/۰۴×۱۰^{-۳}$	$۲/۳۸×۱۰^{-۳}$		
g_3	$۲/۳۵×۱۰^{-۴}$	$۲/۳۲×۱۰^{-۴}$	$۱/۵۲×۱۰^{-۲}$	$۲/۷۹×۱۰^{-۲}$		
g_4	$۲/۲۷×۱۰^{-۴}$	$۲/۳۲×۱۰^{-۴}$	$۸/۲۴×۱۰^{-۲}$	$۲/۵۰×۱۰^{-۲}$		
Max[$g_1,...,g_4$]	$۲/۱۶×۱۰^{-۴}$	$۲/۲۱×۱۰^{-۴}$	$۵/۲۰×۱۰^{-۲}$	$۴/۷۷×۱۰^{-۲}$	۰/۱۴	

جدول ۲ نتایج نمونه مطالعاتی دوم

حالت حدی	احتمال شکست (P_{fail}) $N=۱۰^{۵}$	احتمال شکست (P_{fail}) $N=۱۰^{۶}$	خطای نسبی (E_r) $N=۱۰^{۵}$	خطای نسبی (E_r) $N=۱۰^{۶}$	زمان محاسبات T(sec) $N=۱۰^{۵}$	زمان محاسبات T(sec) $N=۱۰^{۶}$
g_1	$۱/۵۹×۱۰^{-۱}$	$۱/۵۹×۱۰^{-۱}$	$۳/۷۰×۱۰^{-۳}$	$۱/۱۴×۱۰^{-۳}$	۰/۸۶	۶/۴۸
g_2	$۱/۳۴×۱۰^{-۳}$	$۱/۳۵×۱۰^{-۳}$	$۸/۶۲×۱۰^{-۳}$	$۲/۰۱×۱۰^{-۳}$		
g_3	$۲/۲۶×۱۰^{-۷}$	$۲/۸۸×۱۰^{-۷}$	$۶/۹۴×۱۰^{-۳}$	$۳/۸۵×۱۰^{-۳}$		
Max[$g_1,...,g_3$]	$۱/۵۸×۱۰^{-۱}$	$۱/۵۹×۱۰^{-۱}$	$۳/۸۶×۱۰^{-۳}$	$۱/۱۶×۱۰^{-۳}$	۰/۲۹	

جدول ۳ نتایج نمونه مطالعاتی سوم

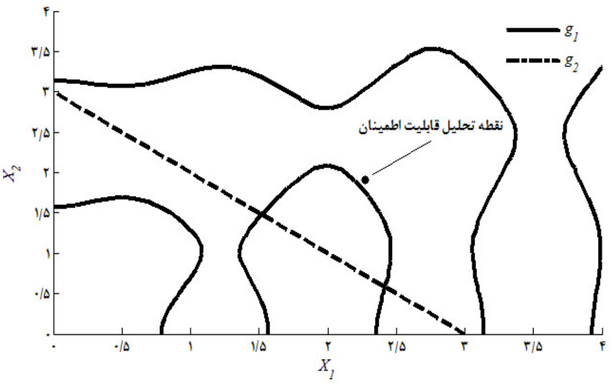
حالت حدی	احتمال شکست (P_{fail}) $N=۱۰^{۵}$	احتمال شکست (P_{fail}) $N=۱۰^{۶}$	خطای نسبی (E_r) $N=۱۰^{۵}$	خطای نسبی (E_r) $N=۱۰^{۶}$	زمان محاسبات T(sec) $N=۱۰^{۵}$	زمان محاسبات T(sec) $N=۱۰^{۶}$
g_1	$۷/۷۸×۱۰^{-۲}$	$۷/۸۲×۱۰^{-۲}$	$۴/۱۴×۱۰^{-۳}$	$۱/۳۳×۱۰^{-۳}$	۳/۸۰	۰/۱۰
g_2	$۱/۷۴×۱۰^{-۲۰}$	$۷/۴۳×۱۰^{-۲۱}$	$۵/۴۵×۱۰^{-۱}$	$۴/۳۳×۱۰^{-۲}$		
Max[g_1,g_2]	$۷/۷۷×۱۰^{-۲}$	$۷/۷۸×۱۰^{-۲}$	$۳/۹۸×۱۰^{-۳}$	$۱/۲۹×۱۰^{-۳}$	۰/۰۵	

نتایج جدول ۲ نشان می‌دهد که به‌کارگیری عملگر Max برای معادل‌سازی چند تابع حالت حدی با یک تابع در مسائلی که اختلاف احتمال شکست توابع آن با یکدیگر اختلاف زیادی دارند کارآمد نیست، به‌طوری که برای حالت حدی سوم که دارای احتمال شکست بسیار پایین است، همان احتمال شکستی درنظر گرفته شده که برای حالت حدی اول درنظر گرفته شده است. در واقع در این نمونه مطالعاتی، روش ارائه شده در مرجع [۷] تمایزی بین احتمال شکست تابع حالت حدی اول تا سوم قائل نشده است. باید توجه داشت احتمال شکست حالت حدی سوم از مرتبه $۱۰^{-۷}$ بوده و بنابراین یک پدیده نادر است که تحلیل قابلیت اطمینان آن با استفاده از مونت کارلو خام امکان‌پذیر نیست. همچنین زمان محاسبات نسبت به نمونه مطالعاتی اول (با وجود تعداد حالت حدی کمتر) افزایش یافته است که نشان دهنده این حقیقت است که تحلیل قابلیت اطمینان پدیده‌های نادر هزینه محاسباتی را افزایش می‌دهد.

۴-۳- نمونه مطالعاتی سوم

این نمونه مطالعاتی در مرجع [۱۳] آورده شده است. ویژگی مهم این نمونه مطالعاتی نویزی بودن تابع حالت حدی اول آن است که معیار خوبی برای محک زدن روش ارائه شده در این مقاله است. همچنین حالت حدی دوم دارای ماهیت نادر با مرتبه عددی بسیار پایینی است. بر این‌اساس دو تابع حالت حدی درنظر گرفته شده است که به‌صورت تابعی از دو متغیر تصادفی نرمال بیان شده‌اند. میانگین متغیر تصادفی اول و دوم به‌ترتیب ۲/۳ و ۲ است و انحراف معیار ۰/۱ برای آن‌ها درنظر گرفته شده است. فرمول‌سازی این نمونه مطالعاتی در رابطه (۱۷) نشان داده شده است.

$$[P_{\text{fail}1},P_{\text{fail}2}]=P\left\{[g_1(\bar{x}),g_2(\bar{x})]\geq 0\right\}$$
$$g_1(\bar{x})=x_1\sin(4x_1)+1.1x_2\sin(2x_2)$$
$$g_2(\bar{x})=-x_1-x_2+3, \quad (۱۷)$$



شکل ۲ توابع حالت حدی نمونه مطالعاتی سوم

برای درک بهتر این نمونه مطالعاتی، توابع حالت حدی و نقطه تحلیل قابلیت اطمینان، در شکل ۲ رسم شده است. میزان نویزی بودن و اعوجاج تابع حالت حدی اول به خوبی در این شکل نشان داده شده است. قابلیت اطمینان این دو حالت حدی با استفاده از روش ارائه شده در این مقاله مورد بررسی قرار گرفته است و نتایج آن با مرجع [۱۳] مقایسه شده و در جدول ۳ نشان داده شده است.

نتایج نشان داده شده در جدول ۳ بیانگر این است که روش ارائه شده در این مقاله نه تنها قادر است است قابلیت اطمینان تابع حالت حدی نویزی اول را محاسبه نماید بلکه می‌تواند قابلیت اطمینان حالت حدی دوم که از مرتبه بسیار پایینی است را نیز تخمین بزند. در این نمونه مطالعاتی نیز به‌کارگیری حالت حدی معادل با استفاده از عملگر Max منجر به جواب محتاطانه می‌شود به‌گونه‌ای که برای حالت حدی دوم که احتمال شکست آن از مرتبه 10^{-20} است، در نهایت احتمال شکستی از مرتبه 10^{-2} درنظر گرفته می‌شود.

۵- نتیجه‌گیری

در این مقاله یک روش تحلیل قابلیت اطمینان بر پایه روش فاصله بی‌نظمی برای تحلیل همزمان چند حالت حدی ارائه شد. بر اساس نتایج به‌دست آمده در این مقاله مشخص می‌شود که استفاده از رویکرد معادل‌سازی چندتابع با یک‌تابع حالت حدی به ویژه زمانی که اختلاف عددی احتمال شکست توابع حالت حدی مختلف با یکدیگر زیاد است، ناکارآمد بوده و منجر به جواب بسیار محتاطانه می‌شود که در یک طراحی اصولی و حساس غیر قابل قبول است. همچنین نتایج به‌دست آمده نشان می‌دهد که سری کردن چند تابع برای تبدیل آن‌ها به یک تابع حالت حدی در حالت کلی جوابگو نیست.

از منظر دقت نیز نتایج به‌دست آمده در این مقاله بیانگر دقت بالای روش فاصله بی‌نظمی در تحلیل قابلیت اطمینان چند تابع حالت حدی غیرخطی و نویزی است. همچنین روش ارائه شده قابلیت منحصر به فردی در تحلیل قابلیت اطمینان پدیده‌های نادر (با احتمال شکست بسیار کم) دارد.

نتایج به‌دست آمده نشان می‌دهد که روش فاصله بی‌نظمی از پتانسیل بالایی برای وارد کردن تحلیل قابلیت اطمینان در طراحی‌های مهندسی حساس و پیچیده برخوردار است؛ به‌ویژه که این روش دارای دقت بالایی است، از محاسبات مربوط به محتمل‌ترین نقطه شکست استفاده نمی‌کند و قابلیت تعمیم برای توزیع‌های احتمالاتی مختلف را دارد.

۶- فهرست علائم

D_{KL}	فاصله بی‌نظمی
$f_{\bar{x}}(.), h_{\bar{x}}(.)$	تابع چگالی احتمال
$g(.)$	تابع حالت حدی
$I[.]$	تابع شاخص
p	احتمال رخداد
$\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$	بردارهای پارامتر مرجع
x	متغیر تصادفی
$\bar{X}$	بردار تصادفی

علایم یونانی

$\bar{\gamma}$	بردار پارامتر سطح
ρ	پارامتر ندرت

زیرنویس‌ها

fail	واماندگی

بالانویس‌ها

CE	فاصله بی‌نظمی
IS	روش نمونه‌برداری بااهمیت
T	هدف (مورد انتظار)
*	مقدار بهینه

۷- مراجع

[1] R. Y. Rubinstein, D. P. Kroese, The Cross-Entropy Method: A unified approach to combinatorial optimization, Monte-Carlo simulation and machine learning, New York:Springer-Verlag, pp. 29-58, 2004.

[2] M. Pupashenko, Minimizing variance and cross-entropy importance sampling methods for rare event simulation, MSc. Thesis, University of Kaiserslautern, 2011.

[3] K. Pugazhendhi, A. K. Dhingra, structural reliability analysis with cross entropy and low discrepancy sampling methods, ASME 2011 International Mechanical Engineering Congress and Exposition, Colorado, USA, pp. 521-530, 2011.

[4] D. P. Kroese, K. P. Hui, Applications of the cross-entropy method in reliability, Computational Intelligence in Reliability Engineering, Vol. 40, pp. 37-82, 2007.

[5] S. K. Au, J. L. Beck, A new adaptive importance sampling scheme for reliability calculations, Structural Safety, Vol. 21, pp. 135-158, 1999.

[6] R. E. Melchers, Importance sampling in structural systems, Structural Safety, Vol. 6, pp. 3-10, 1989.

[7] S. Engelund, R. Rackwitz, A benchmark study on importance sampling techniques in structural reliability, Structural Safety, Vol. 12, pp. 255–276, 1993.

[8] H. Wang, Z. Gong, H. Z. Huang, X. Zhang, Z. Lv, system reliability based design optimization with Monte Carlo simulation, IEEE International Conference on Quality, Reliability, Risk, Maintenance, and Safety Engineering, Chengdu, China, pp.1143-47, 2012.

[9] M. Bajellan, Reliability-based multidisciplinary optimization of satellite conceptual design, MSc Thesis, Tehran, University of Tehran, 2013. (In Persian)

[10] R. Y. Rubinstein, D. P. Kroese, Simulation and the Monte Carlo method, 2nd Ed., New York:John Wiley & Sons, pp. 235-252, 2007.

[11] D. P. Kroese, T. Taimre, Z. I. Botev, Handbook of Monte Carlo Methods, New Jersey:Wiley & Sons, pp. 463-485, 2011.

[12] S. F. Katsuki, Hyperspace division method for structural reliability. Journal of Engineering Mechanics, Vol. 120, No. 11, pp. 2405-27, 1994.

[13] V. Dubourg, Adaptive Surrogate Models For Reliability Analysis and Reliability-Based Design Optimization, PhD Thesis, Clermont-Ferrand, Blaise Pascal University, 2011.